Mahmoude ZOLFAGHARI
Ingénieur Géographe

DÉTERMINATION DES PARTIES VUES ET CACHÉES D'UN ENSEMBLE DE POLYÈDRES CONVEXES EN VUE DU TRACÉ AUTOMATIQUE DE PERSPECTIVES URBAINES

Thèse présentée pour l'obtention du grade de
Docteur Ingénieur
à l'Université de Paris VI

Juin 1972

Thèse soutenue le 6 Juin 1972 devant la Commission d'examen

Prof. J. COULOMB, président

Prof. R. de POSSEL

M. G. DUPOUY

M. Ph. HOTTIER

Iran, ce travail est à toi ; c'est toi surtout qui m'a donné la possibilité de le terminer.

Remerciements

Je remercie tout d'abord un illustre disparu, Monsieur le Professeur Cagnard, enseignant de la géophysique appliquée à l'Université de Paris VI, qui m'a encouragé à préparer en France un travail de thèse.

Je remercie vivement Monsieur le Professeur J. Coulomb d'avoir accepté la présidence du jury de cette thèse, ainsi que Monsieur le Professeur de Possel qui a bien voulu faire partie de ce jury.

Je suis très reconnaissant à Monsieur l'Ingénieur des Ponts et Chaussées G. Dupouy qui, en acceptant de diriger ce travail, m'a permis de le commencer ; qu'il touve ici ma profonde gratitude pour toute la bienveillance, les conseils, les encouragements qui ont permis d'aboutir à ce travail.

J'exprime mes très sincères remerciements à Monsieur l'Ingénieur Géographe Ph. Hottier, Chef de la Division des canevas photogrammétriques et des travaux non cartographiques du Service de la Photogrammétrie de l'Institut géographique national, pour l'aide essentielle qu'il m'a apportée, d'abord en me proposant le sujet, ensuite en mettant à ma disposition les moyens matériels de son étude et en améliorant parfois la forme de mes rédactions initiales.

Je suis très vivement reconnaissant à Monsieur l'Ingénieur Général Géographe J. Cruset, Chef de la 3ème Direction à l'Institut géographique national, de la liberté qu'il m'a donnée de faire ce travail à l'intérieur de ses services, de la très grande bienveillance qu'il m'a constamment témoignée et de l'aide matérielle qu'il m'a fait donner pour l'édition.

Je tiens à exprimer ma profonde gratitude à Monsieur l'Ingénieur en Chef Géographe R. d'Hollander, Directeur de l'Ecole Nationale des Sciences Géographiques, pour toute la bienveillance qu'il n'a pas cessé de me manifester, d'abord au cours de mes études dans cette Ecole et ultérieurement parmi les difficultés d'ordre administratif qu'impliquait la préparation de cette thèse.

Que Monsieur l'Ingénieur Géographe J. Denègre, Chef de la division de la cartographie automatique à l'Institut géographique national et ses collaborateurs trouvent ici mes remerciements pour leur collaboration aussi amicale qu'efficace.

Qu'il en soit de même pour les techniciens de l'atelier informatique de l'Université de Paris VI pour les facilités qu'ils m'ont assurées.

J'exprime enfin mes remerciements à Messieurs les Ingénieurs Géographes B. Bouley et P. Bizouard, à toute l'équipe du Centre de traitement des informations et au personnel de la division des CP et TNC de l'Institut géographique national, en particulier à Mademoiselle E. Guillepain et Monsieur le Technicien Géomètre M. Gory qui ont veillé à la présentation matérielle du document pour la soutenance de la thèse.

SOMMAIRE

Pages

- Introduction 3

- Généralités 4

1. Enoncé du problème 4
2. Cas d'objets définis par un ensemble de polygones plans opaques 5

- Problème des parties vues et cachées pour un ensemble de N polyèdres convexes extérieurs (ou adjacents) deux à deux

1. Introduction 6
2. Enregistrement des données et opérations de vérification 7
3. Traitement d'un polyèdre convexe isolé 8

3.1. Principe 8

3.2. Algorithme 10

4. Traitement de l'ensemble de deux polyèdres convexes extérieurs l'un à l'autre (ou adjacents) 10

4.1. Principe 10

4.2. Détermination du polyèdre occulteur et du polyèdre occulté 12

4.3. Algorithme 12

4.4. Détermination des segments d'arêtes cachés du polyèdre occulté par le polyèdre occulteur 15

5. Traitement de N polyèdres 16

- Exemples de résultats obtenus 17

UNIV. LEIDEN BIBL.

DÉTERMINATION DES PARTIES VUES ET CACHÉES D'UN ENSEMBLE DE POLYÈDRES CONVEXES EN VUE DU TRACÉ AUTOMATIQUE DE PERSPECTIVES URBAINES

Mahmoude ZOLFAGHARI
Ingénieur Géographe, Téhéran

INTRODUCTION

Ce travail est une contribution à l'étude des possibilités de tracé automatique de perspectives urbaines à partir d'une banque de données. Il a été fait en liaison avec l'Institut Géographique National qui recherche des solutions à ce problème pour des travaux intéressant l'urbanisme et l'architecture.

Les buts poursuivis peuvent être divers : - protéger l'aspect des quartiers historiques et pour cela pouvoir fixer par zone une altitude limite de construction de façon, par exemple, que sur un certain nombre de trajets effectués à pied le promeneur ne voit apparaître dans son champ de vision aucun édifice nouveau discordant ; - ou encore protéger la vision globale d'un ensemble urbain qu'on peut avoir de certains points de vue situés sur des hauteurs avoisinantes : il faut alors pouvoir étudier, avant la construction, la façon dont pourra s'insérer dans le paysage urbain tout bâtiment neuf. Le même problème se pose pour des ensembles urbains entièrement neufs (création de "villes nouvelles") ; la solution classique qui consiste à passer par des maquettes est reconnue depuis longtemps comme imparfaite : la vision d'une ville sous forme de maquette est une vision aérienne, tout différente de celle qu'il faudrait connaître, celle du promeneur réel dans la ville construite.

Tout ceci est possible, théoriquement, grâce à la constitution de "banques de données urbaines" ; ce nom ambitieux désigne simplement un ensemble de données spatiales (généralement les coordonnées x y z de sommets de lignes de construction) qui définissent les formes des volumes construits sur une certaine aire. On peut espérer ainsi, en particulier, obtenir tout type de perspective : perspective conique (la photographie appartient à ce type) relative à un certain "centre" et à un certain "tableau" ; perspectives parallèles (centre de perspective à l'infini), en particulier perspectives axonométriques (perspectives sur un plan horizontal, parallèlement à une direction à 45° : les figures horizontales sont conservées, ainsi que les longueurs verticales).

La banque de données peut être constituée soit à partir de plans (cotés), quand ils existent pour des projets de nouvelles constructions, soit, et c'est la méthode développée à l'Institut Géographique National, à partir de couvertures aériennes photographiques à l'aide des méthodes et moyens classiques de la photogrammétrie ; cette seconde méthode est d'ailleurs la seule concevable, du point de vue de l'économie et de la rapidité, quand il s'agit d'effectuer le relevé d'ensembles urbains déjà construits.

La photogrammétrie est un ensemble de méthodes permettant à partir de photographies (au moins deux) d'un même objet, prises depuis des endroits différents, de reconstituer de façon précise la forme et les dimensions de l'objet photographié. La prise de vues une fois faite, des appareils spéciaux très complexes appelés appareils de restitution, permettent d'enregistrer sur ruban perforé ou sur bande magnétique, dans un système d'axes trirectangulaires, les coordonnées x y z de tout point désiré de l'objet photographié : il suffit à l'opérateur de positionner à l'endroit désiré un repère sur la surface de l'image reconstitutée de l'objet, image qu'il voit en relief. On comprend donc comment, dans ce cas, peut être constituée la banque de données.

A partir d'une telle banque, il est très facile ensuite de déterminer par le calcul (calcul sur ordinateur) une perspective quelconque, définie par un point de vue et un "tableau", de tout ou partie de l'ensemble urbain contenu dans la banque, c'est-à-dire de déterminer les images des différents points de l'espace enregistrés par leurs coordonnées x y z. On peut ensuite, si on dispose d'un traceur (périphérique d'un ordinateur qu'on peut programmer pour tracer des lignes) et à condition d'avoir spécifié, lors de l'enregistrement des données, les points qui doivent être

joints, faire exécuter automatiquement le tracé de cette perspective.

Mais juste avant ce stade se pose le problème des parties vues et des parties cachées : il est clair que, pour une perspective donnée, un grand nombre de segments "cachés" ne doivent pas être tracés (du moins en trait plein). Ce problème est, comme on sait, délicat. Nous présentons ici une méthode basée sur la remarque suivante : tout ensemble urbain peut toujours être décomposé, et ceci au stade de la saisie des données, en un ensemble de N polyèdres convexes pleins, disjoints ou adjacents deux à deux en général très simples. (Nous n'envisageons pas ici le cas de surfaces courbes, telles que coupoles, dômes, etc... rares dans les villes occidentales). On est donc ramené à résoudre le problème des parties vues et cachées pour un ensemble de N polyèdres convexes, problème admettant une solution rigoureuse et simple du point de vue mathématique, ce dernier point découlant du fait que les facettes d'un polyèdre convexe sont des polygones convexes soit (pour un seul polyèdre) entièrement vus, soit entièrement cachés, et qu'il est beaucoup plus aisé de travailler sur des polygones convexes que sur des polygones quelconques. L'ensemble d'algorithmes que nous présentons ici pour résoudre ce problème n'a évidemment pas la prétention d'être le plus efficace.

Le problème de l'obtention d'une perspective (parties cachées éliminées ou tracées en tireté) par calcul et tracé automatique étant supposé résolu, on peut s'en poser un autre qui en est la suite : comment restituer l'impression de relief de l'observateur humain, impression qui jouera un grand rôle dans l'appréciation esthétique des proportions ? La solution est connue et, en théorie, simple :

Il suffit de donner à voir aux yeux deux perspectives coniques du même ensemble dont les centres sont décalés d'une longueur égale à la distance des deux yeux. Chaque perspective constitue une moitié du classique stéréogramme : la vision en relief nécessite alors l'emploi d'un petit instrument appelé stéréoscope ; une solution améliorée, consiste à utiliser les anaglyphes : l'une des perspectives est tracée en rouge, l'autre en vert, et l'observateur chausse des lunettes dont l'un des verres est rouge et l'autre vert ; aucun entraînement à la vision stéréoscopique n'est, dans ce cas, nécessaire et il n'y a pas de limitation de format pour les documents. En pratique, il convient, lorsqu'on désire établir de tels stéréogrammes, de respecter quelques précautions qu'on trouvera exposées en détail dans les manuels de photogrammétrie.

GENERALITES

1. Enoncé du problème

Soit A un élément de surface et S un point de vue. A étant supposé opaque est un masque pour tout ce qui se trouve dans l'espace occupé par son faisceau perspectif, du côté opposé de S. Est cachée toute autre figure située dans cette zone d'espace.

Soit B un élément de surface d'une telle autre figure ; cet élément définit aussi un faisceau perspectif. Pour qu'il y ait une partie cachée dans l'ensemble (A, B), il faut qu'il existe une région commune C, aux deux faisceaux. La région C détermine sur A une partie cachante A' et sur B une partie cachée B' (fig. 1).

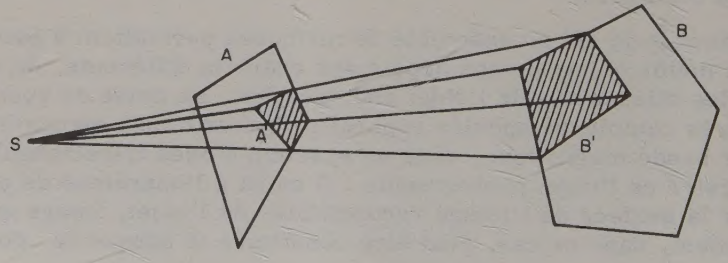


Figure 1.

Pour savoir si c'est A qui cache B (ou l'inverse), il suffit de comparer les éloignements, par rapport à S, de deux points M_A et M_B situés sur un même rayon perspectif et appartenant respectivement aux éléments A et B.

Ainsi il y a deux problèmes distincts :

- déterminer si les faisceaux (ou leurs images) ont ou n'ont pas une partie commune,

- au cas où ils en ont une, trouver les positions relatives de A' et B' par rapport au tableau.

Ces deux problèmes peuvent être traités indifféremment au niveau des objets ou au niveau des images.

2. Cas d'objets définis par un ensemble de polygones plans opaques

Le cas où l'objet est une surface continue ou presque continue, telle la surface topographique, ne sera pas considéré ici : il existe alors au problème des parties vues et cachées des solutions aussi précises qu'on le veut, simples et efficaces.

Mais ces méthodes ne peuvent pas s'appliquer au cas d'un objet défini par un ensemble de polygones plans opaques et plus particulièrement encore par un ensemble des polyèdres : les facettes polygonales peuvent être de n'importe quelle dimension et disposées de façon quelconque les unes par rapport aux autres ; il faut alors recourir à des méthodes moins simples.

Il existe déjà des méthodes pour traiter ce problème en vue de visualiser la perspective d'un objet sur une console de visualisation ou par un traceur. Ces méthodes sont généralement fondées sur l'un des principes suivants :

1) on cherche les éloignements respectifs des portions des facettes se projetant dans chaque maille d'un quadrillage du plan du tableau, afin de déterminer la facette qui occulte cette maille*(fig. 2).

2) ou alors les arêtes de l'objet sont décomposées en très petits segments qui seront assimilés à leur centre et qui seront éliminés s'ils se trouvent derrière une facette**.

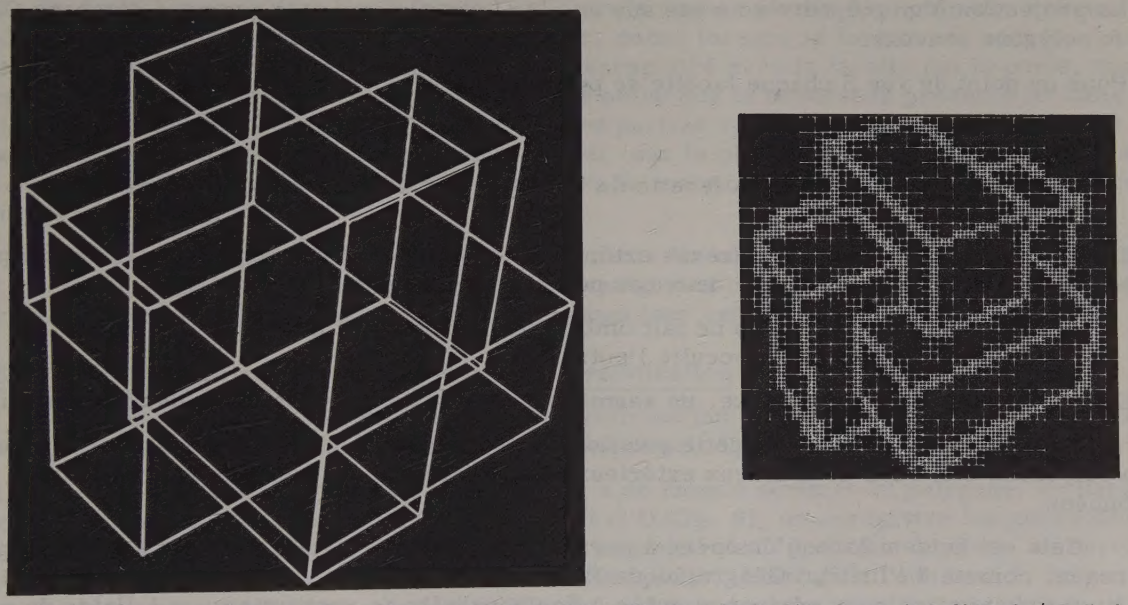


Fig. 2 - Schéma de la méthode inventée par John Warnock de l'Université d'Utah (U. S. A.).

Malgré les nombreuses améliorations apportées à ces procédés au cours des dernières années, le nombre d'opérations à effectuer, toujours très élevé, augmente considérablement lorsque l'on veut accroître la précision.

La méthode qui est présentée dans ce qui suit est fondée sur un principe entièrement différent ;

- les extrémités des segments à tracer s'y obtiennent de façon rigoureuse par intersection géométrique ;

---

* Computer displays, par Ivan E. Sutherland, Scientific American, juin 1970.

** Interactive graphics in data processing. Modeling in three dimensions, par A. Appel, 1968, IBM system J.

- le fait que les objets traités soient décomposés en polyèdres convexes dont les faces sont des polygones convexes simplifie beaucoup le traitement à ce stade ;

- le problème se réduit en effet à déterminer les parties vues et cachées d'un ensemble de facettes polygonales convexes.

Une solution donc, qui vient facilement à l'esprit, consiste à examiner la position dans l'espace de chaque polygone par rapport à tous les autres et à éliminer sa partie cachée chaque fois qu'il tombe dans l'ombre d'un autre. Cette méthode est évidemment très lourde : par exemple si on considère un ensemble de 100 cubes à 6 faces, il y a, si on ne prend aucune précaution $N(N - 1)/2 = 180\ 000$ opérations de comparaison à faire dont chacune est assez compliquée.

Mais le nombre des opérations sera considérablement réduit par l'identification préalable de toutes les paires de facettes dont les images ont une partie commune, ce qui évite des opérations inutiles sur toutes les paires de facettes qui ne s'occultent pas. Profitant encore une fois des propriétés du polyèdre convexe, les opérations seront encore beaucoup réduites.

PROBLEME DES PARTIES VUES ET CACHEES POUR UN ENSEMBLE DE N POLYEDRES CONVEXES DISJOINTS DEUX A DEUX OU ADJACENTS

1. Introduction

Dans le cas où l'ensemble à traiter est décomposable en N polyèdres convexes,deux à deux extérieurs ou adjacents, le problème des parties vues et cachées aura une solution rigoureuse et simple, découlant des remarques géométriques suivantes :

- Les différentes facettes d'un polyèdre convexe sont des polygones convexes.
- La projection d'un polyèdre convexe sur un plan (contour apparent que nous noterons CA) est un polygone convexe.
- Pour un point de vue S chaque facette de polyèdre est :
  - soit entièrement vue,
  - soit entièrement cachée,
  - soit perspective quand la facette de l'espace contient le point de vue (centre de perspective).
- Etant donné deux polyèdres convexes extérieurs (ou adjacents, par un sommet, ou une portion d'arête, ou une portion de facette), deux cas peuvent se produire :
  - aucun des deux polyèdres ne fait ombre sur (n'occulte) l'autre,
  - l'un des deux polyèdres occulte l'autre.
- Etant donné un polygone convexe, un segment de droite ne le coupe qu'en deux points au plus.

Un des grands intérêts de cette solution provient du fait que la décomposition d'un ensemble en polyèdres convexes deux à deux extérieurs (ou adjacents) est possible au niveau de la saisie des données.

Cela est évident lorsqu'on opère à partir de plans cotés ; mais cela est également possible lorsque, comme à l'Institut Géographique National, les données sont enregistrées à partir de couvertures photographiques aériennes grâce à des appareils de restitution ; si à l'aide de ces appareils on ne peut restituer ce qui est caché sur une photographie aérienne (par exemple l'habillement de façades, fenêtres, portes ...), par contre il est toujours possible de restituer des volumes polyédriques, en décomposant ces volumes en polyèdres convexes et en enregistrant successivement ces polyèdres ; ainsi dans l'îlot représenté par la figure 3 il y a cinq polyèdres convexes.

Pour la plupart des usages, les formes globales des immeubles suffisent ; cheminées, lucarnes, fenêtres, ornementation sont inutiles lorsqu'il s'agit d'apprécier de loin les proportions spatiales d'un ensemble de volumes construits ; et les formes globales peuvent être saisies sans difficulté sur les photographies aériennes.

Mais rien n'empêche d'appliquer la même méthode, à des ensembles urbains saisis de façon plus fine. Ainsi, si on considère l'ensemble de la figure 4 :

- A condition de rajouter certaines lignes de découpe, il est toujours possible de décomposer du point de vue des volumes cet ensemble en polyèdres convexes pleins et disjoints (ou adjacents).

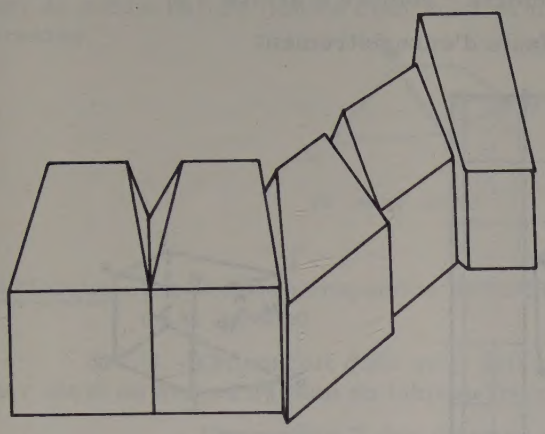


Figure 3

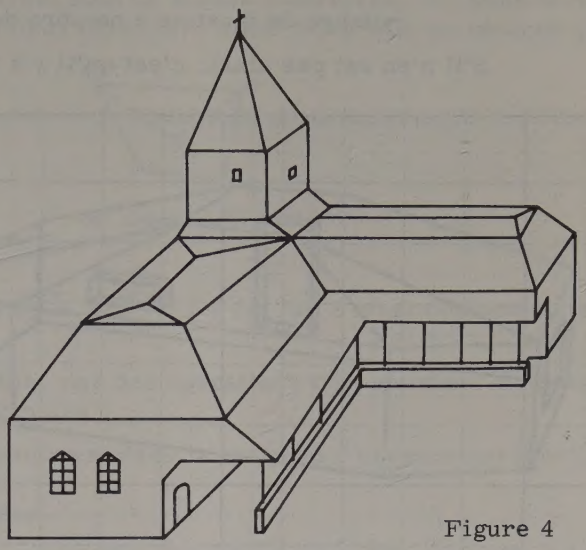


Figure 4

- Il est possible également d'enregistrer quand il y a lieu, un "décor linéaire" (composé de segments de droite) appartenant à une facette : si on raisonne au niveau d'un polyèdre convexe unique, le décor linéaire est vu lorsque la facette est vue, caché lorsque la facette est cachée. Le décor linéaire (fenêtres, portes, ornementation) étant enregistré avec la facette qui le porte, sous forme d'un ensemble de segments, on verra sans peine que le processus présenté ici dans le cas de N polyèdres pour la résolution du problème des parties vues et cachées reste utilisable (Si deux polyèdres s'occultent, on est ramené en effet, sur le plan du tableau, à chercher l'intersection de tous les segments du polyèdre occulté avec le contour apparent du polyèdre occulteur). Exemple : figure 5.

- Il est possible également de tenir compte d'éléments linéaires et rectilignes isolés (colonnettes, etc) ou de murs plans sans épaisseur : ces deux catégories ne sont en effet que des polyèdres convexes dégénérés et la solution que nous exposons leur est applicable dans son principe.

2. Enregistrement des données et opérations de vérification

L'enregistrement est effectué polyèdre convexe par polyèdre convexe. Au niveau d'un polyèdre convexe, on opère facette par facette. Au niveau d'une facette :

a) on enregistre les coordonnées spatiales x y z de chaque sommet du polygone, en décrivant le contour de la facette. Ainsi pour la facette A B C D (fig. 6), on enregistre les coordonnées des sommets A, B, C et D. S'il y a lieu (grâce à un code relatif à chaque facette), on enregistre tous les segments du décor linéaire porté par cette facette. Ainsi si le code vaut 1, on enregistrera successivement les segments MN et NP, dans le cas de figure ; si le code vaut 0, il n'y a pas de décor linéaire.

b) lorsque tous les polyèdres sont enregistrés, on procède par calcul à certaines opérations de vérification et de numérotation.

b. 1. un premier programme recherche pour les sommets des polyèdres donnés (non dégénérés) tous les triplets x y z identiques, à une tolérance d'enregistrement près (chaque sommet est en effet pointé une fois dans toutes les facettes auxquelles il appartient et les pointés effectués par un opérateur humain peuvent être légèrement différents). Comme chaque sommet du polyèdre est situé au moins sur trois arêtes, il en résulte que le même triplet (à la tolérance de mesure près) doit être retrouvé au moins trois fois ; s'il n'en est pas ainsi c'est qu'il y a erreur.

A tous les jeux identiques (on prend la moyenne des jeux de coordonnées) on affecte le même numéro ; à l'issue de ce programme, les sommets de chaque facette ont donc reçu un nu-

méro (numéros qui permettront par la suite de faciliter certaines opérations).

b. 2. on vérifie ensuite que le polyèdre convexe satisfait à la relation :

nombre de facettes + nombre de sommets = nombre d'arêtes + 2.

S'il n'en est pas ainsi, c'est qu'il y a une faute d'enregistrement.

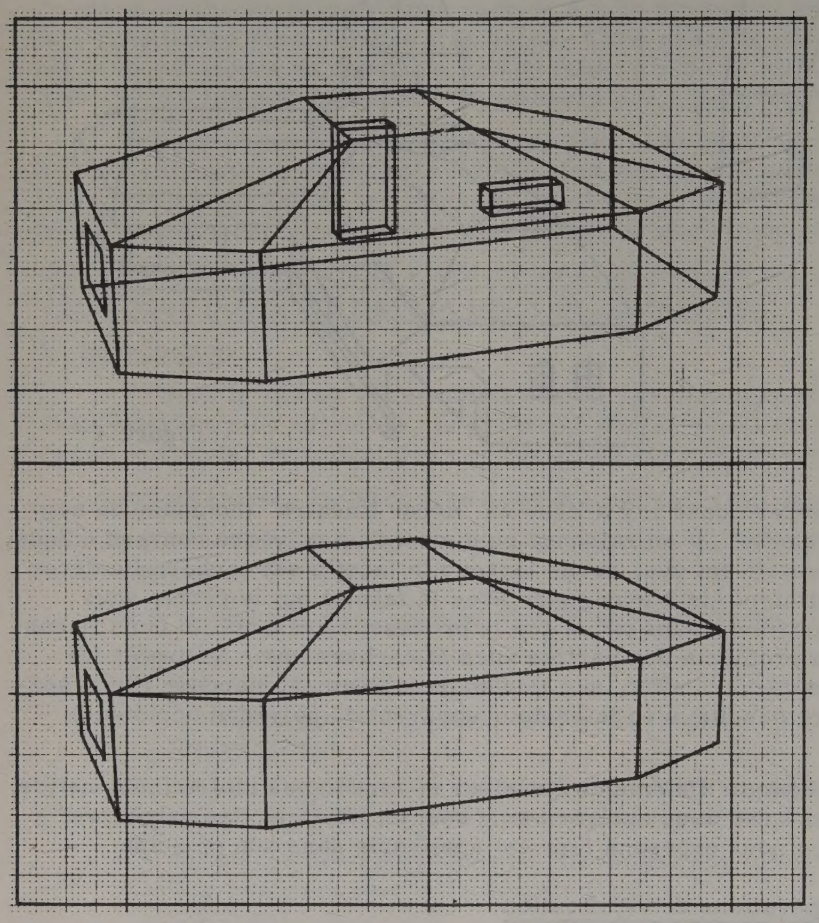


Fig. 5 - Exemple d'un résultat obtenu pour un ensemble de 3 polyèdres convexes adjacents.
Noter le "décor linéaire" sur la facette à l'extrême gauche.

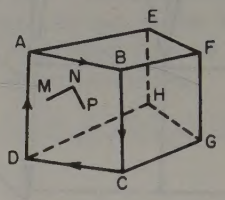


Figure 6

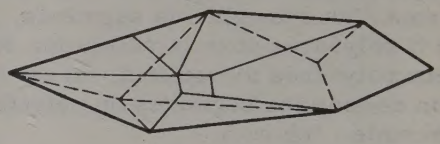


Figure 7

3. Traitement d'un polyèdre convexe isolé

3.1. Principe : le traitement découle des remarques suivantes :

3.1.1. - les arêtes ou sommets d'un polyèdre convexe sont soit vus soit cachés, à l'exception des sommets et arêtes appartenant au contour apparent du polyèdre.

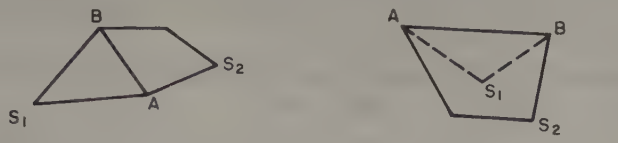
- une facette (polygone convexe) est soit entièrement vue, soit entièrement cachée, soit perspective : dans le dernier cas la facette contient dans son plan le point de vue et a pour image un segment de droite.

3.1.2. - deux facettes adjacentes, non perspectives, c'est-à-dire ayant un côté commun, sont : - soit toutes deux vues, - soit toutes deux cachées, - soit l'une vue et l'autre cachée.

Il est très facile de voir si deux facettes adjacentes non perspectives sont de même nature ou non (fig. 8). On considère pour cela, sur le tableau, un sommet de l'une, soit S_1 et un sommet de l'autre, soit S_2 (S_1 et S_2 n'appartenant pas au côté commun) et on forme, si AB est le côté commun, les produits vectoriels.

$\overrightarrow{S_1 A} \wedge \overrightarrow{S_1 B}$ et $\overrightarrow{S_2 A} \wedge \overrightarrow{S_2 B}$

Si ces deux produits vectoriels (qui sont colinéaires) sont de signes contraires, les deux facettes sont de même nature (toutes deux vues ou toutes deux cachées) ; sinon elles sont de natures différentes.



de même nature *de natures différentes*

Figure 8

Remarque : une facette perspective est telle que $\overrightarrow{S_1 A} \wedge \overrightarrow{S_1 B} = 0$ (A, B, S étant des sommets de la facette).

3.1.3. - On conçoit donc qu'il soit possible, par des opérations très simples, de constituer ainsi au niveau du plan du tableau trois ensembles :

- l'ensemble P des facettes perspectives (dans la pratique :"presque perspectives").
- l'ensemble F des facettes vues .
- l'ensemble G des facettes cachées.

En fait, lorsqu'on constitue progressivement les ensembles F et G, on ne sait pas au début lequel comporte les facettes vues et lequel comporte les facettes cachées ; la détermination de la qualité "vu" ou "caché" peut se faire dès la rencontre de la première paire de facettes adjacentes non perspectives de natures opposées.

Supposons en effet (fig. 9) qu'on ait deux facettes non perspectives adjacentes selon un côté AB et de natures différentes ; soit S_1 un sommet de la 1ère facette n'appartenant pas au côté commun, S_2 un sommet de la 2ème facette, également distinct de A ou B.

On calcule alors les produits mixtes :

$$(AB, AS_1, AC) \quad \text{et} \quad (AB, AS_1, AS_2)$$

S'ils sont de même signe, c'est la facette ABS_2 qui est vue ; s'ils sont de signes contraires, c'est la facette ABS_1 qui est vue.

Il faut signaler qu'il se pourrait qu'on ait jamais une telle paire : l'ensemble F ou l'ensemble G pouvant exceptionnellement être séparés par un ensemble de facettes perspectives, (par exemple cas d'une pyramide tronquée dont le sommet est confondu avec le point de vue).

Mais le même raisonnement est valable, pour le cas d'une facette perspective ABS_2 adjacente à une facette non perspective ABS_1 (fig. 10). Si (AB, AS_1, AC) et (AB, AS_1, AS_2) sont de même signe, la facette non perspective ABS_1 est cachée ; sinon elle est vue.

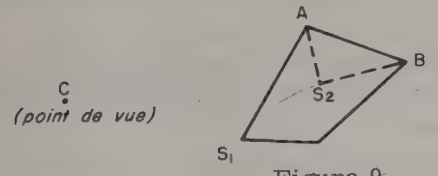


Figure 9

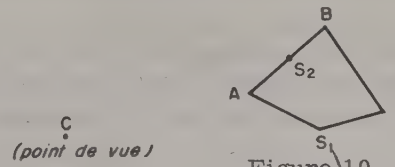


Figure 10

3.1.4. - Une fois déterminé l'ensemble des facettes vues et des facettes cachées, on détermine ensuite très facilement le contour apparent (CA) du polyèdre sur ce tableau.

Pour ce faire on cherche dans l'ensemble des facettes vues (ou l'ensemble des facettes cachées), les arêtes qui n'apparaissent qu'une fois (ceci se fait par simple comparaison des numéros des extrémités des arêtes) : ce sont les côtés du CA ; nous rangerons ensuite les sommets du CA, dans l'ordre des sommets adjacents, en décrivant le polygone dans le sens direct (par exemple).

3.2. Algorithme

3.2.1. - Détermination des images de toutes les facettes sur le tableau.

3.2.2. - Détermination de l'ensemble de facettes perspectives (presque perspectives) P.

3.2.3. - Détermination de l'ensemble de facettes vues et de l'ensemble de facettes cachées (facettes non perspectives).

Nous appellerons E l'ensemble des n facettes non perspectives du polyèdre (rangées dans un certain ordre), F et G les deux ensembles à déterminer.

a) On prend la 1ère facette de E, soit F_1. On recherche toutes les facettes de même nature que F_1 et qui la touchent

- on en trouve l, soit F_2, F_3, ... F_{l+1}

  On pose alors :

  $F = (F_1, F_2 \cdots F_{l+1})$; $E = E - (F_1, F_2 \cdots F_{l+1})$

  $k = 1$ (k est défini en b) ; (m = nombre de facettes de $F = l + 1$)

  Aller en b.

- on n'en trouve aucune (F ne contient donc qu'une facette):

  $F = F_1$; $E = E - F_1$

  Aller en d.

b) L'ensemble F est constitué de telle sorte que ses k premières facettes (F_1, $F_2 \cdots F_k$) ont leurs facettes adjacentes de même nature dans F. On considère la facette F_{k+1} et on cherche dans E toutes les facettes de même nature qui lui sont adjacentes.

- on en trouve l : F_{m+1}, $F_{m+2} \cdots F_{m+l}$

  On pose alors :

  $F = F \cup (F_{m+1}, \cdots F_{m+l})$; $E = E - (F_{m+1}, \cdots F_{m+l})$

  $k = k + 1$

  Aller en c.

- on n'en trouve pas : aller en d.

c) Si $k < m$ (m nombre de facettes de F) : aller en b.

d) Détermination de l'identité vue ou cachée de l'ensemble F. On pose G = E.

3.2.4. - Détermination du contour apparent. Ceci se fera par exemple avec l'ensemble F ; les sommets seront rangés dans l'ordre adjacent, le CA étant décrit dans le sens trigométrique.

4. Traitement de l'ensemble de deux polyèdres convexes extérieurs l'un à l'autre (ou adjacents)

4.1. Principe

Nous supposons d'abord que ces deux polyèdres, considérés isolément, ont chacun été traités par le processus décrit précédemment : les facettes cachées ont été éliminées. La partie suivante du traitement est basée sur les remarques géométriques suivantes :

4.1.1. - Etant donnés deux polyèdres convexes (extérieurs l'un à l'autre ou adjacents) et les données d'une perspective, deux cas seulement sont possibles :

- aucun des deux polyèdres ne porte ombre sur l'autre,

- l'un des deux polyèdres fait ombre sur l'autre : ce polyèdre sera dit "occulteur", l'autre sera dit "occulté".

(On remarquera que ceci n'est pas vrai pour des polyèdres quelconques : deux polyèdres quelconques peuvent être tels qu'ils s'occultent mutuellement).

4.1.2. - La condition nécessaire et suffisante pour que deux polyèdres s'occultent est qu'il existe, sur le tableau, un point du CA de l'un intérieur (au sens strict) à l'autre.

4.1.3. - Si les deux polyèdres s'occultent et si m est un point du CA du premier P_1 intérieur au CA du deuxième P_2 (fig. 11), on peut (à condition de posséder à ce moment les définitions spatiales des deux polyèdres) déterminer facilement le polyèdre occulteur et le polyèdre occulté :

- on détermine la facette vue de P_1 dont l'image contient m, soit F_1.
- on détermine la facette vue et la facette cachée de P_2 contenant m (éventuellement une arête vue ou cachée), soit F_2 et F_3.
- on cherche les intersections du rayon perspectif passant par m, avec ces trois facettes dans l'espace et on note les éloignements algébriques (au tableau) de ces intersections, soit z_1, z_2, et z_3.

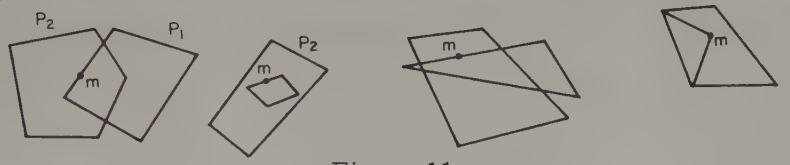


Figure 11

On a donc toujours (conformément à la figure 12) : $z_2 > z_3$ (en valeur algébrique).

Dans ces conditions :

$$z_1 \geqslant z_2 > z_3 \Longrightarrow P_1 \text{ occulteur}$$
$$z_1 \leqslant z_3 < z_2 \Longrightarrow P_2 \text{ occulteur}$$

4.1.4. - Une fois déterminé lequel des deux polyèdres occulte l'autre, il suffit alors sur le tableau d'éliminer tous les segments d'arête du polyèdre occulté intérieurs au CA du polyèdre occulteur (fig. 13).

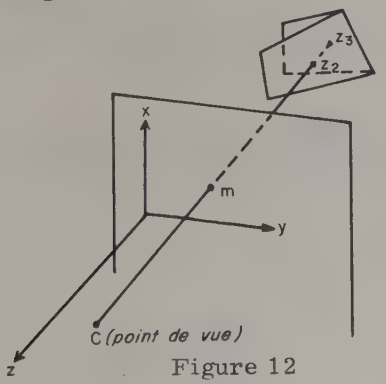


Figure 12

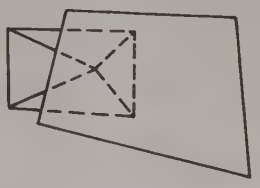


Figure 13

4.1.5. - Remarque complémentaire - La considération, sur le plan du tableau, des rectangles circonscrits aux deux CA permet d'accélérer le processus : il est clair en particulier qu'une condition suffisante (mais non nécessaire) pour que les deux polyèdres ne s'occultent pas est que l'intersection des deux rectangles circonscrits soit nulle (fig. 14).

Le rectangle circonscrit relatif à P_1 est défini par quatre nombres :

$$x_{11} = \text{Min (x)} \quad ; \quad x_{12} = \text{Max (x)} \quad ; \quad y_{11} = \text{Min (y)} \quad ; \quad y_{12} = \text{Max (y)}$$

Celui relatif à P_2 est défini par quatre nombres analogues x_{21}, x_{22}, y_{21} et y_{22}.

Il est clair également que le polygone intersection des deux CA est situé dans l'intersection des deux rectangles circonscrits, que nous appellerons "rectangle commun".

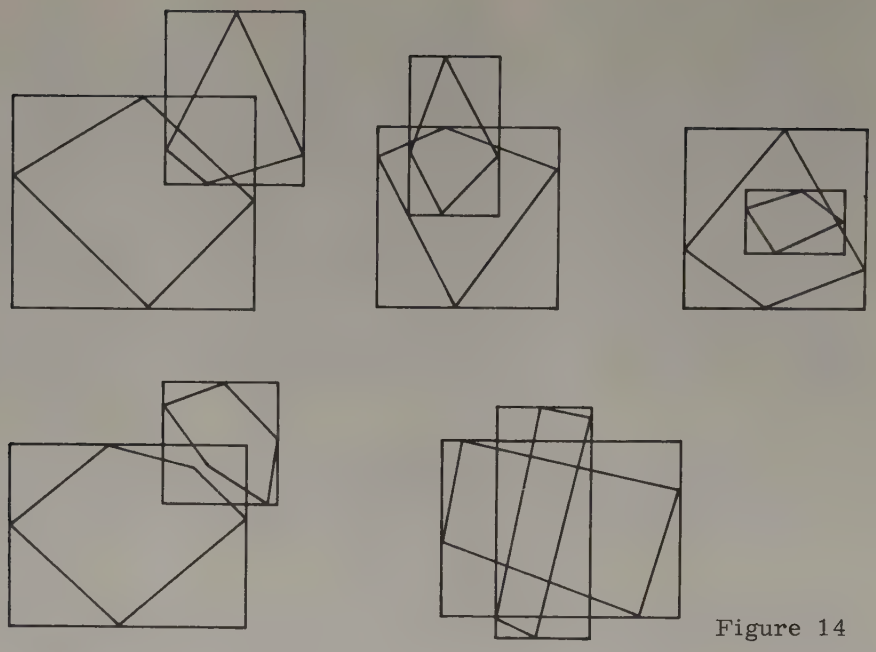


Figure 14

4. 2. Détermination du polyèdre occulteur et du polyèdre occulté

Pour ce faire, nous devons avoir à notre disposition :

- les CA des deux polyèdres sur le tableau,
- les ensembles de facettes vues et cachées pour chacun des deux polyèdres.

Nous supposons également programmées (sous-programmes) certaines opérations élémentaires en particulier :

- l'intersection d'un segment avec un ensemble E de côtés appartenant au CA d'un polygone convexe ; il peut y avoir 0, 1 ou 2 intersections (fig. 15).

- la condition pour qu'un point soit intérieur à un polygone convexe (donné par ses sommets rangés dans l'ordre adjacent) (fig. 16) est que tous les produits vectoriels MA ∧ MB, MB ∧ MC — ME ∧ MA soient de même signe ; s'il y en a deux de signes contraires, le point est extérieur ; s'il y en a un nul, le point M est sur le CA.

Ceci étant, on propose l'algorithme suivant :

Figure 15

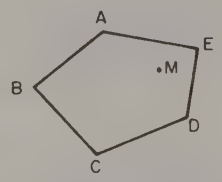


Figure 16

4. 3. Algorithme pour la discrimination du polyèdre occulteur et du polyèdre occulté

4. 3. 1. - On détermine le rectangle commun, intersection des deux rectangles circonscrits. Si ce rectangle commun est nul, les deux polyèdres ne s'occultent pas : FIN.

4. 3. 2. - Détermination, pour chacun des deux CA, des côtés coupant le rectangle commun ou intérieurs à ce rectangle. Ceci se fait par des tests de comparaison très simples.
Nous poserons :

CA_{RP_1} = ensemble de n_1 côtés du CA du polyèdre P_1 coupant le rectangle commun ou intérieurs à celui-ci et rangés dans l'ordre où on les rencontre sur le CA.

CA_{RP_2} = ensemble des n_2 côtés du CA de P_2 coupant le rectangle commun ou intérieurs à celui-ci.

4.3.3. - Recherche d'un point d'un des deux CA intérieur à l'autre.

4.3.3.1. - Si $CA_{RP_1} = CA_{RP_2} = 0$

Les deux CA ne se coupent pas : les deux polyèdres ne s'occultent pas (fig. 17) : FIN.

4.3.3.2.- Si $CA_{RP_1} \neq 0$ et $CA_{RP_2} = 0$ (ou l'inverse). On prend le 1er sommet de P_1, S_1. Deux cas sont possibles (fig. 18) :

a) Ce sommet S_1 est extérieur au CA de P_2

Dans ce cas les deux CA sont extérieurs l'un à l'autre. Les deux polyèdres ne s'occultent pas : FIN.

b) Ce sommet S_1 est intérieur à P_2

Le CA de P_1 est intérieur au CA de P_2. On pose $m = S_1$: m est un point du CA de P_1 intérieur au CA de P_2. Aller en 4.3.4.

4.3.3.3. - Si $CA_{RP_1} \neq 0$ et $CA_{RP_2} \neq 0$

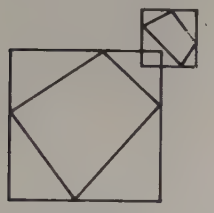
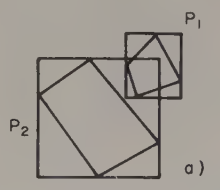


Figure 17



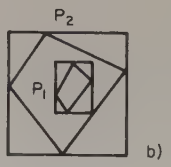


Figure 18

On utilise le sous-algorithme suivant :

A) i = 0 (i rang du côté du CA_{RP_1})

B) i = i + 1
On cherche l'intersection du côté i de CA_{RP_1} avec CA_{RP_2}

a) Le côté i coupe 2 fois CA_{RP_2}, soit m_1 et m_2 les intersections (fig. 19)

On pose : $m = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)$; m est un point de P_1 intérieur à P_2.
Aller en 4.3.4.

b) Le côté i ne coupe qu'une fois CA_{RP_2} en m_1 (fig. 20)

- Si m_1 n'est pas un sommet, ni pour P_1, ni pour P_2, les deux polyèdres s'occultent.
  On cherche l'extrémité m du côté intérieure à P_2
  Aller en 4.3.4.
- Si m_1 est un sommet soit pour P_1, soit pour P_2 (ou pour les deux) ; si, par exemple m_1 est un sommet pour P_1 (fig. 21), on considère le sommet du côté, soit s :
  - si s est intérieur à P_2, on pose m = s ; les deux polyèdres s'occultent. Aller en 4.3.4.
  - si s est extérieur à P_2, on considère le second côté du CA de P_1 passant

par s ; soit t son extrémité

- si t est intérieur à P_1, on pose m = t
  Aller en 4. 3. 4.
- si t est extérieur à P_1, les deux polyèdres ne s'occultent pas.
  FIN du traitement.

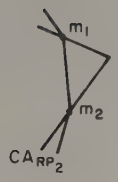
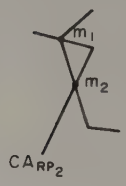


Figure 19



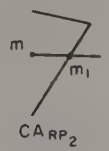


Figure 20

Figure 21

c) Le côté i est tangent à un côté du CA_{RP_2}, une de ses extrémités au moins (soit m_1) étant sur ce côté (fig. 22).
On considère le second côté du CA de P_1 passant par m_1 ; soit s sa 2ème extrémité :

- si s est intérieur à P_2, on pose m = s.
  Aller en 4. 3. 4.
- si s est extérieur à P_2, on cherche l'intersection de $m_1 s$ avec P_2 (fig. 23) :
  - il n'y en a qu'une : m_1 ; les deux polyèdres ne s'occultent pas : FIN.
  - il y en a deux m_1 et m_2 ; on pose : $m = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)$.
    Aller en 4. 3. 4.

d) Le côté i ne coupe pas CA_{RP_1}

- si $i < n_1$ aller en B.
- si $i = n_1$ aucun côté de CA_{RP_1} ne coupe CA_{RP_2}. On prend un sommet S_1 du CA de P_1 et un sommet S_2 du CA de P_2 (fig. 24)
  - Si S_1 est extérieur au CA de P_2 et S_2 extérieur au CA de P_1, les deux polyèdres ne s'occultent pas : FIN.
  - Si S_1 est intérieur au CA de P_2 ou S_2 intérieur au CA de P_1, l'un des deux CA est intérieur à l'autre ; on pose $m = S_1$ (si S_1 intérieur au CA de P_2).
    Aller en 4. 3. 4.

Figure 22

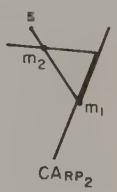


Figure 23

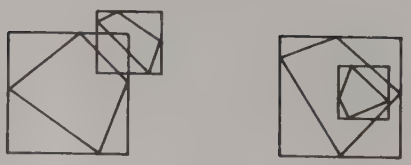


Figure 24

4. 3. 4. - Détermination du polyèdre occulté et du polyèdre occulteur - Nous avons trouvé un point m de l'un des deux CA (de P_1 par exemple, intérieur à l'autre CA (fig. 25).

Pour déterminer le polyèdre occulté et le polyèdre occulteur, on recherche alors la facette vue de P_1 (éventuellement l'arête vue ou même le sommet vu) dont l'image sur le tableau contient m et on détermine l'éloignement au tableau de l'intersection du rayon perspectif passant par m avec cette facette, soit z_1. On recherche ensuite de même la facette vue et la facette cachée de P_2 (éventuellement, arête, sommet) dont les images contiennent m ; et on détermine les intersections spatiales de ces deux facettes avec le rayon perspectif passant par m ; soit z_2 et z_3 les éloignements algébriques au tableau des facettes vues et cachées.

Si $z_1 \geqslant z_2 > z_3$: P_1 est occulteur

Si $z_1 \leqslant z_3 < z_2$: P_2 est occulteur

Fin de l'algorithme (4. 3.).

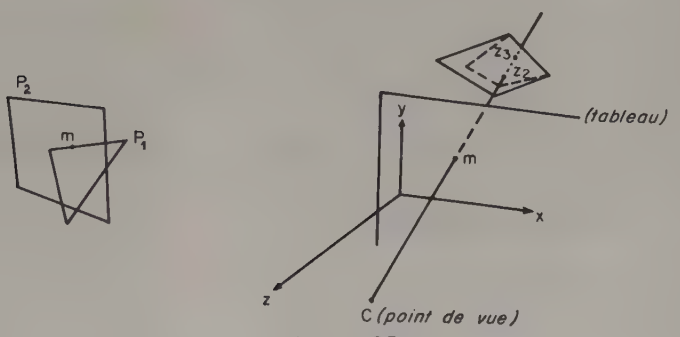


Figure 25

4. 4. Détermination des segments d'arête cachés du polyèdre occulté par le polyèdre occulteur

Soit P_1 le polyèdre occulteur et P_2 le polyèdre occulté.

Nous poserons :

V_{P_1} = ensemble des segments d'arête vus définis par leurs extrémités (xy) sur le tableau.

V_{P_2} = définition analogue pour P_2.

G = ensemble des segments d'arête cachés pour P_1 et P_2.

Notre but est de constituer ces trois ensembles.

Notons, remarque importante, qu'à la fin du traitement V_{P_1} et V_{P_2} doivent contenir tous les segments vus ; ces segments vus peuvent être :

- des arêtes initiales de facette joignant deux sommets du polyèdre.

- des segments d'arête de facette : lorsqu'on a à traiter en effet plus de deux polyèdres une même arête peut être partiellement occultée en plusieurs endroits par plusieurs polyèdres ; ainsi sur la figure 26, l'arête $S_1 S_2$, donnera naissance à quatre segments d'arête vus.

- des segments (éventuellement) du décor linéaire portés par les diverses facettes des polyèdres.

Nous supposons avoir à notre disposition l'ensemble des côtés initiaux du CA du polyèdre occulteur P_1, intérieurs au rectangle commun, ou extérieurs à celui-ci et déterminés précédemment, soit CA_{RP_1} (fig. 27). Le sous-programme constamment utilisé dans cette phase sera celui qui, étant donnés un segment $M_1 M_2$ et un ensemble de côtés orientés (par exemple dans le sens direct)

appartenant au CA d'un polygone convexe et se succédant dans l'ordre adjacent (certains côtés pouvant cependant manquer), détermine la partie cachée de M_1 M_2 et la partie vue.

Ceci étant on peut proposer l'algorithme suivant (fig. 28) :

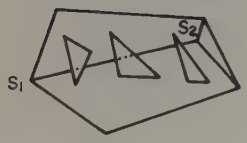


Figure 26

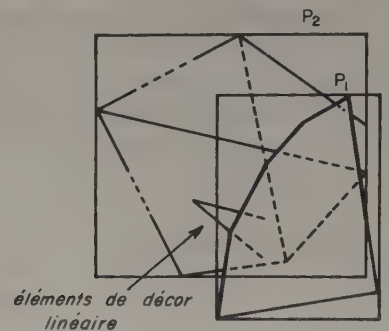


Figure 27

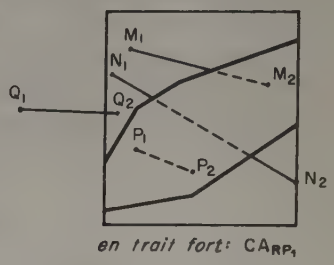


Figure 28

4.4.1. - Initialisation de V_{P_1} et V_{P_2}

V_{P_1} = ensemble des arêtes vues de P_1, y compris éventuellement le décor linéaire.

V_{P_2} = définition analogue de P_2.

G = 0

A noter que, lorsqu'on travaille avec N polyèdres, V_{P_1}, V_{P_2} et G sont peu à peu complétés : la première initialisation a lieu alors au niveau du traitement de chaque polyèdre considéré isolément.

4.4.2. - Pour chaque segment de V_{P_2}, on détermine sa partie cachée par CA_{RP_1} et sa partie vue. Dans V_{P_2} on substitue alors au segment sa partie vue. La partie cachée est déposée dans G.

5. Traitement de N polyèdres $P_1, P_2 \ldots P_N$

Le principe est le suivant :

- On élimine d'abord pour chaque polyèdre considéré isolément les parties vues et les parties cachées. On constitue ainsi pour chaque polyèdre les ensembles d'arêtes vues V_{P_i}, les arêtes cachées étant déposées dans l'ensemble G.

On traite ensuite, selon le processus décrit dans la 2ème partie, toutes les combinaisons de polyèdres deux à deux : il y en a N (N-1)/2. On possède alors l'ensemble des segments d'arête vus : $V = V_{P_1} \cup V_{P_2} \cup \ldots \cup V_{P_N}$ et l'ensemble des segments d'arête cachés G. (On notera que, dans G, les segments peuvent avoir des portions communes : une même portion de segment peut en effet avoir été reconnue comme cachée à plusieurs reprises ; si on désire donc tracer les parties cachées, il faudra éliminer auparavant les parties en trop).

Lorsque N est grand, ce processus qui exige donc N(N - 1)/2 comparaisons est lourd, en particulier lorsqu'on ne dispose pas d'un ordinateur à très grande mémoire centrale ; beaucoup plus que les calculs, ce sont les allées et venues entre mémoire centrale et mémoire périphérique (disque, bande magnétique), dues à l'impossibilité de faire tenir simultanément en mémoire centrale les données relatives aux N polyèdres, qui risquent de prendre beaucoup de temps.

Mais beaucoup de comparaisons, parmi ces N(N - 1)/2 combinaisons, s'avèreront négatives (pour toute paire de polyèdres dont aucun n'occulte l'autre) ; il peut donc sembler très in-

téressant de mettre au point un test simple permettant de décider si deux polyèdres ne s'occultent pas ; on ne fera alors entrer en mémoire centrale que des paires de polyèdres ayant des chances de s'occulter.

Le test que nous proposons s'effectue sur le tableau : on suppose connu, pour tous les polyèdres, le rectangle circonscrit au CA sur le plan du tableau, c'est-à-dire quatre nombres par polyèdre, ainsi que le numéro de ce polyèdre (fig. 29). L'ensemble de tous les rectangles circonscrits est supposé tenir en mémoire centrale ; on voit alors qu'étant donnés deux polyèdres P_i et P_e de centres C_i et C_e et de côtés a_i et b_i, a_e b_e : une condition suffisante pour qu'ils ne s'occultent pas est que l'intersection de leurs rectangles circonscrits soit nulle. On prend alors le 1er polyèdre P_1 et on cherche tous les polyèdres dont le rectangle circonscrit coupe celui de P_1, soit P_2, P_3, ... P_k ; l'enregistrement (P_1 P_2 ... P_k) qui contient tous les polyèdres ayant des chances d'occulter P_1 est alors stocké ; on supprime ensuite du plan du tableau le polyèdre P_1 et on passe au polyèdre suivant, etc. (Notons que cette recherche, peut elle-même être accélérée au niveau du tableau, si on possède un rangement astucieux de polyèdres, ainsi qu'une borne maximale des dimensions des rectangles circonscrits).

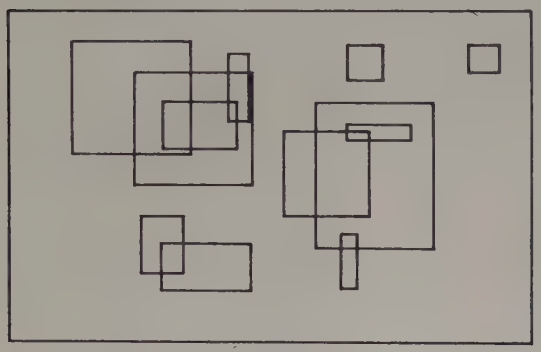


Figure 29

On aura ainsi créé un certain nombre de sous-groupes de polyèdres, sous-groupes de taille réduite, qu'on pourra alors faire entrer en mémoire centrale avec toutes les données nécessaires. S'il s'avérait que l'un de ces sous-groupes excède la capacité de la mémoire centrale, il y aurait lieu de le scinder lui-même en deux ou plusieurs sous-groupes : par exemple, si l'enregistrement P_1, P_2, P_3 ... P_{2k} qui contient tous les polyèdres ayant des chances d'occulter P_1 est trop grand, on pourra le scinder en deux sous-groupes : P_1, P_2 ... P_k et P_1 P_{k+1} ... P_{2k} : l'ensemble des deux sous-groupes définit complètement la contribution du polyèdre P_1.

EXEMPLES DE RESULTATS OBTENUS

On trouve, ci-après, des reproductions de résultats obtenus selon les principes précédemment exposés.

- Figure 30 : perspective conique d'un objet, sans élimination des parties cachées, calculée par 10070 et tracée par le traceur CII (1)
- Figure 31 : perspective cylindrique, après élimination des parties cachées, calculée par IBM 360/25, tracée par coragraphe (2).
- Figure 32 : perspective conique (parties cachées éliminées).
- Figures 33, 34, 35, 36 : perspectives coniques (parties cachées éliminées) du même ensemble d'objets vu de différents points de vue ; l'ensemble est constitué de 140 points (13 polyèdres convexes) ; le temps de calcul pour chaque dessin sur 10070/CII a été d'environ 5 secondes.
- Figures 37 et 38 : des stéréogrammes du même ensemble d'objets.\

---

(1) Matériel disponible à l'atelier d'informatique de l'Université de Paris VI.
(2) Matériel disponible aux ateliers de St-Mandé de l'Institut Géographique National.

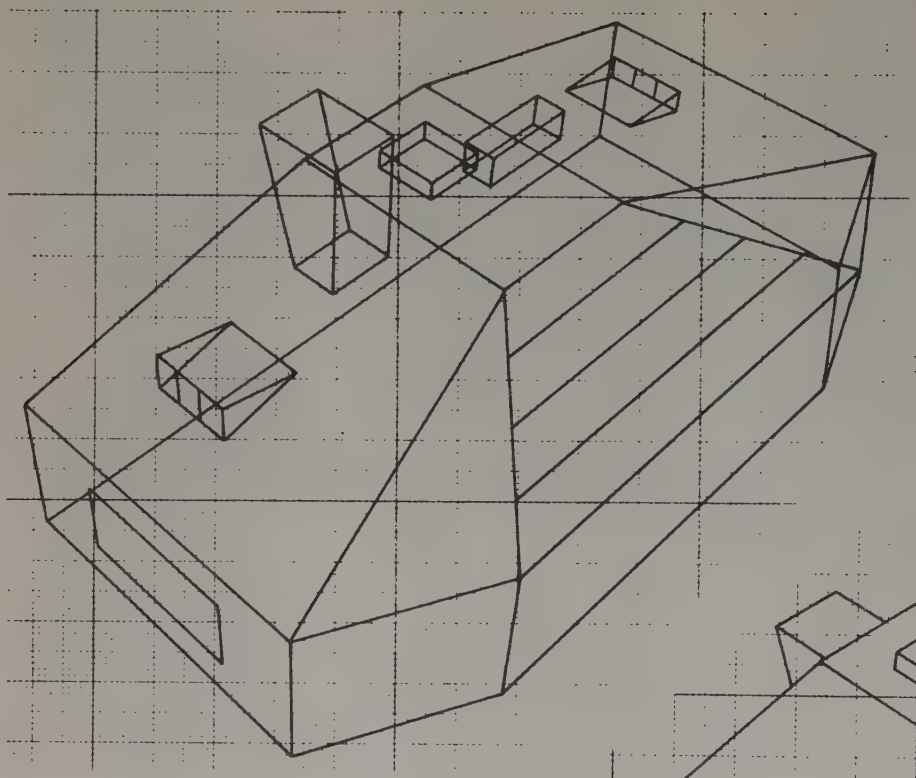


Figure 30

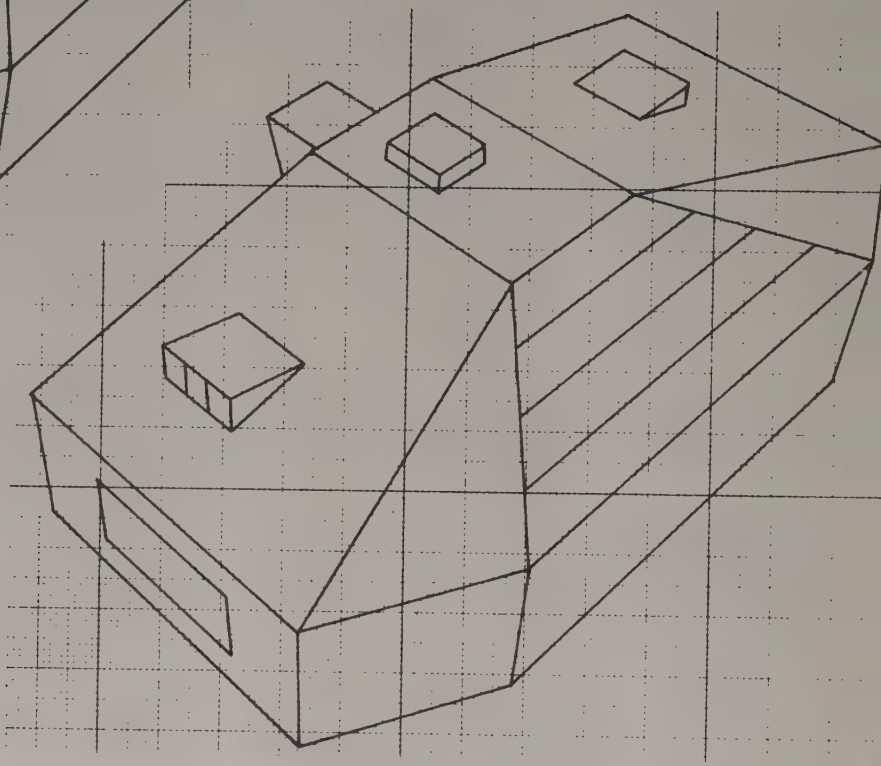


Figure 32

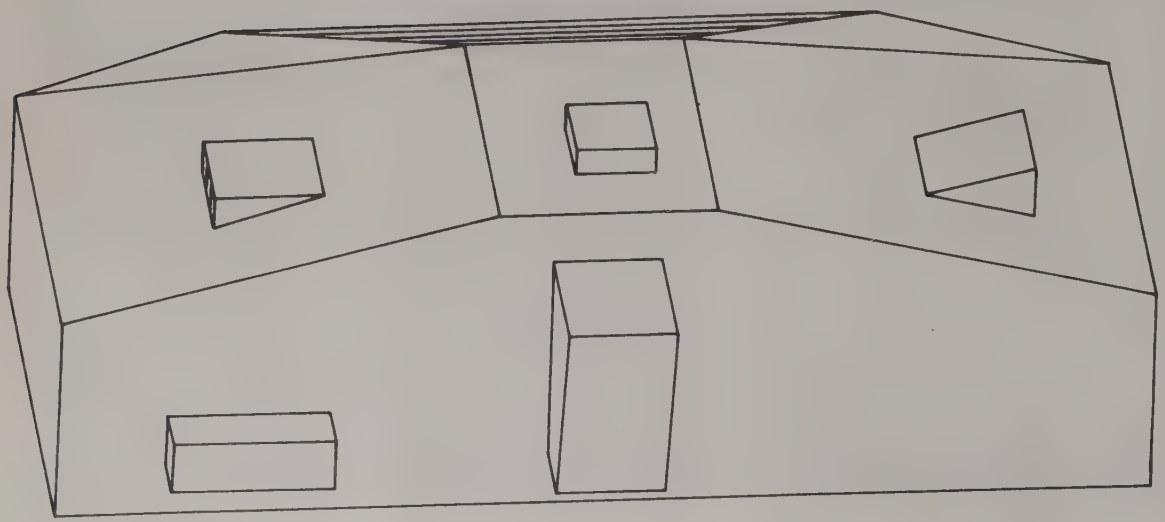


Figure 31

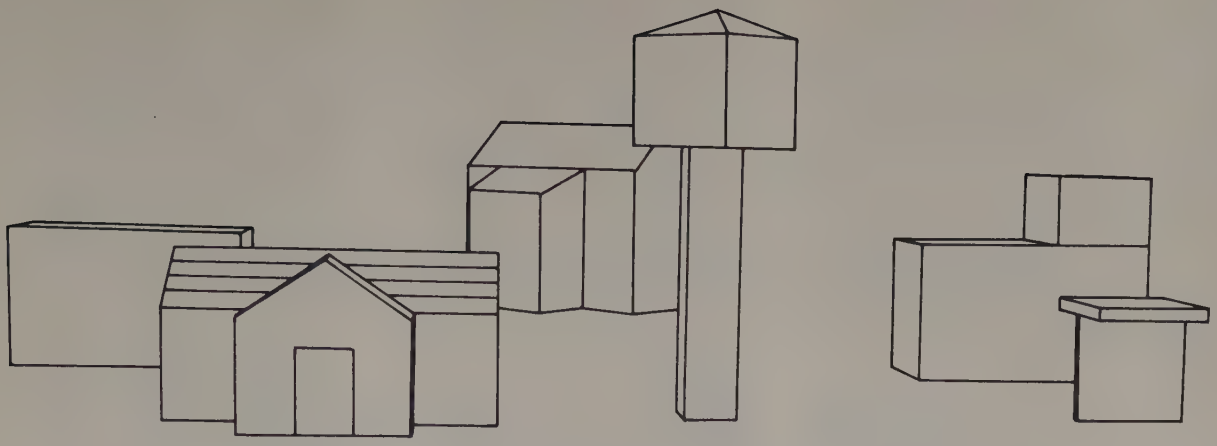


Figure 33

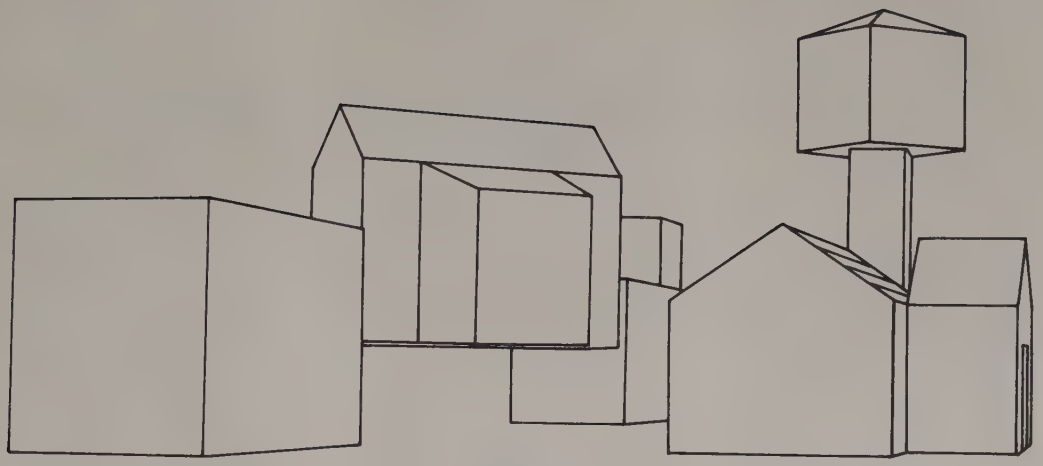


Figure 34

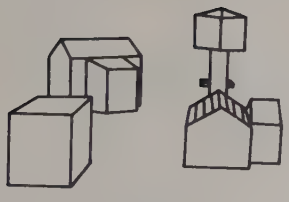


Figure 35

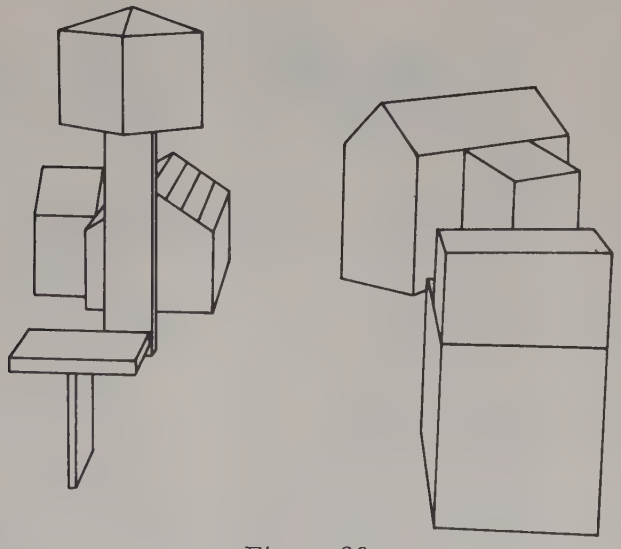


Figure 36

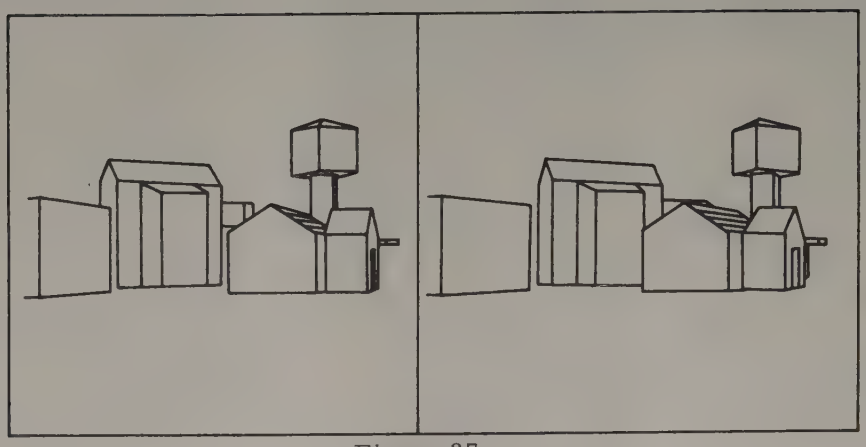


Figure 37

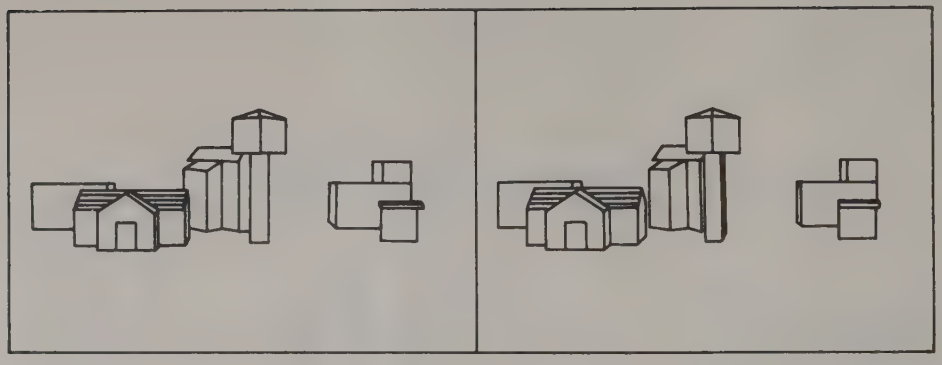
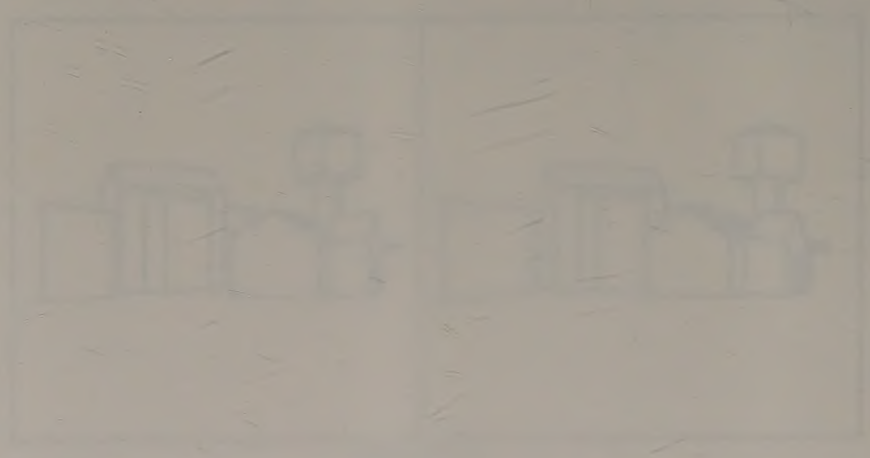
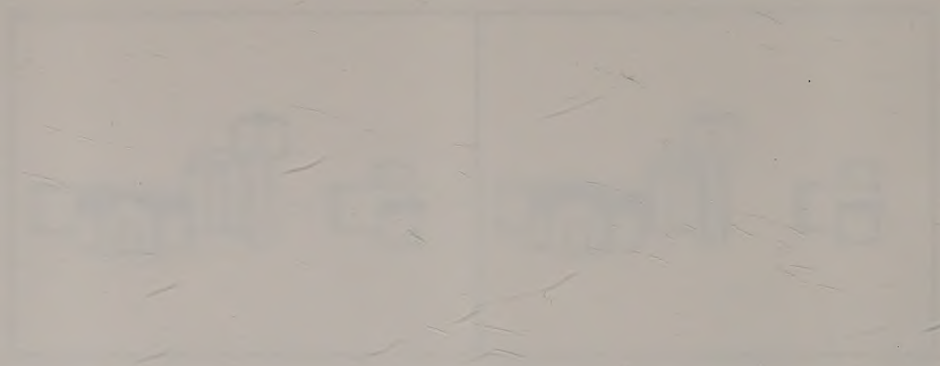



Figure 38